EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE EXACTE VAKKEN

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

33e JAARGANG 1957/58
IV - 15 DECEMBER 1957

INHOUD

P. NOORDHOFF N.V. - GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang *f* 8,00; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs *f* 6,75.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging; het abonnementsgeld is begrepen in de contributie (*f* 8,00 per jaar, aan het begin van het verenigingsjaar (1 september t.e.m. 31 augustus) te storten op postrekening 143917 ten name van de Vereniging van Wiskundeleraren te Amsterdam).

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voor zover ze de wens daartoe te kennen geven en *f* 5,00 per jaar storten op postrekening 87185 van de Penningmeester van Liwenagel te Amersfoort.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. D. N. van der Neut te Zeist.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan H. W. Lenstra te Groningen.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

aan 10°. Stel de vergelijkingen op, waaruit de grootste hellingshoek, die de staaf daarbij met de horizontale richting kan maken, te berekenen is. De berekening behoeft niet te worden uitgevoerd. Geef een duidelijke schets, waarin $D = 8$ cm. (1944, 2).

3. Een rechte, hellend geplaatste staaf ABC kan scharnierend bewegen in een verticaal vlak. Het draaipunt A is het ondereinde van de staaf. In het punt B is de staaf zonder wrijving ondersteund door een ronde, horizontale pen. In het vrije boveneinde C hangt een gewicht G. Het gewicht van de staaf blijft buiten beschouwing. De hoek van de staaf met een horizontaal vlak bedraagt 30°.

Gevraagd wordt de steunpuntsreacties in A en in B door berekening en grafisch te bepalen. $AB = 3a$, $BC = 2a$, $ABC = 5a$. (1946, 2).

4. Een enkelvoudige slinger met een lengte van 1,2 m en waarvan het stoffelijk punt een gewicht heeft van 60 gram wordt losgelaten onder een hoek α met de verticaal, $\cos \alpha = \frac{1}{4}\sqrt{2}$.

Gevraagd worden te bepalen richting en grootte van de resulterende kracht op het stoffelijk punt en van de daardoor veroorzaakte versnelling:

1°. voor het moment, waarop de slinger juist is losgelaten. Bereken voor dat moment ook de spanning in de draad.

2°. voor het moment waarop, door de beweging van de slinger, de hoek α is verminderd tot 45°.

De berekeningen moeten worden uitgevoerd in het cgs-stelsel. Valversnelling 9,8 m/sec^2. (1947, 1).

5. Een wig, waarvan het gewicht verwaarloosd mag worden, zit tussen twee blokken geklemd, uitsluitend onder de krachtwerking van deze blokken. De tophoek van de wig is 2α, de wrijvingshoek aan beide wigvlakken is φ.

a. Wat weet gij nu van de wrijvingshoek in verband met de tophoek?

b. Indien elk blok een gegeven totale kracht K kg op de wig uitoefent, hoe groot zijn dan de normale kracht en de wrijvingskracht op een wigvlak?

c. Op de rug van de wig wordt nu een gegeven trekkracht P kg uitgeoefend, waardoor de wig op het punt staat los te geraken. Bereken nu de totale kracht, uitgeoefend door een blok op de wig en de normale kracht en de wrijvingskracht op een wigvlak. (1947, 3).

30 OPGAVEN OVER MECHANICA

verzameld en van antwoorden voorzien

door

H. W. LENSTRA

De onderstaande 30 opgaven over theoretische mechanica zijn verzameld uit de schriftelijke examens, die gedurende de laatste 15 jaar voor het N-I-akte-examen werden samengesteld. Deze akte geeft bevoegdheid voor het geven van onderwijs in natuurkunde en mechanica aan lagere technische scholen, sinds kort ook voor wiskunde. De exameneisen voor theoretische mechanica gaan iets verder dan die voor het eindexamen van de hogere burgerschool B; de uitgekozen opgaven kunnen naar mijn mening echter uitstekend dienen als oefenstof voor deze scholen. Voor de antwoorden ben ik verantwoordelijk; de lezers zullen mij een groot genoegen doen, wanneer zij mij van eventuele onjuistheden hierin op de hoogte willen brengen.

1. Een kogel P met een gewicht van 10 kg beweegt zonder wrijving langs een in een hellend vlak liggende cirkelvormige baan. Het vlak maakt met de horizon een hoek $\alpha = 30°$. Aan P is een koord, lengte $R = 4$ m, bevestigd. Het andere uiteinde van het koord is bevestigd aan een vast punt M, het middelpunt van de door P doorlopen cirkel. Het gewicht van het koord mag verwaarloosd worden. Men vraagt, als $g = 10$ m/sec² wordt genomen:

a. de snelheid v_A van P in het onderste punt A van de cirkelvormige baan voor het geval, dat P nog juist het bovenste punt daarvan passeert;

b. de spankracht S_A in het koord, op P uitgeoefend, in het onderste punt A van de baan voor dit zelfde geval. (1943, 1).

2. In een holle, rechte cirkelcilinder met horizontale as en inwendige middellijn D cm, wordt een rechte staaf geplaatst. Deze staaf kruist de cilinderas loodrecht; de lengte er van bedraagt $\frac{1}{2}D\sqrt{3}$ cm. De overige afmetingen worden verwaarloosd. Het zwaartepunt van de staaf ligt in het midden. De wrijvingshoek tussen elk der uiteinden van de staaf en de cilinderwand is gelijk

6. Op een hellend vlak (basis 4 m, hoogte 3 m) ligt een, als stoffelijk punt te beschouwen, voorwerp A van 5 kg waaraan een koord is bevestigd, dat evenwijdig aan de helling omhoog loopt.

Aan de top gaat dit over een katrol verticaal omlaag en daar hangt aan het koord een tweede katrol. Over deze laatste is een koord geslagen, dat aan zijn (verticale) parten gewichten B en C draagt van resp. 1,6 en 3,52 kg.

Men laat dit stelsel aan zich zelf over, waarbij men echter verhindert, dat het voorwerp A zich naar boven verplaatst. Hiertoe blijkt het voldoende, dat men op A een kracht uitoefent van 0,4 kg evenwijdig aan de helling omlaag.

a. Bereken de snelheid van de gewichten B en C, nadat deze een weg van 2,4 m hebben afgelegd.

Teken, beschrijf en bereken de krachten, die werken op het voorwerp A tijdens de beweging van de gewichten B en C. Bereken de wrijvingscoëfficiënt aan de helling (katrolwrijving en gewichten van katrol en koorden te verwaarlozen).

b. Daarna wordt het aan A bevestigde stelsel verwijderd en A afzonderlijk op de helling geplaatst op 2 m afstand van de voet en daar losgelaten.

Bereken de snelheid aan de voet van de helling en de ontwikkelde wrijvingswarmte. (1 kcal. = 427 kgm).

c. Vervolgens beweegt A zich verder over een volkomen glad horizontaal vlak, met een snelheid, die in grootte gelijk is aan die, welke aan de voet van de helling was verkregen. Het komt hierbij in botsing met een stil liggend voorwerp D van 15 kg. De botsing is centraal en volkomen veerkrachtig.

Bereken de hoeveelheid van beweging en de bewegingsenergie:

1°. van A zowel voor als na de botsing;

2°. van D na de botsing.

Neem $g = 10$ m/sec^2. (1948, 1).

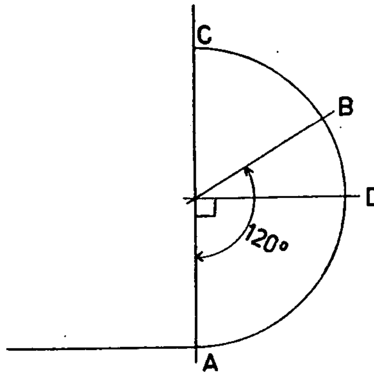
7. Zie figuur 1.

Een half-cirkelvormige goot AC met straal van 0,8 m is opgesteld in een verticaal vlak en met het ondereinde A op een horizontaal vlak bevestigd, zodat de middellijn AC verticaal staat.

Een, als stoffelijk punt te beschouwen, voorwerp P van 0,2 kg schiet bij A met een zodanige snelheid de goot binnen, dat het deze eerst weer verlaat in het punt B, waarbij de doorlopen boog AB 120 graden bedraagt.

a. Bereken de snelheid in A.

b. Hoeveel krachten werken er, als de cirkelbeweging is aangevangen in A, op het voorwerp P?



Figuur 1

Teken en beschrijf deze krachten. Hoe groot zijn deze krachten? Beantwoord deze vragen ook voor het punt D, dat gepasseerd wordt, als de doorlopen boog 90 graden bedraagt.

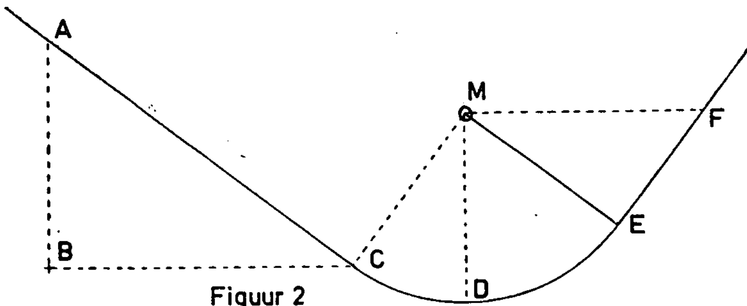
c. Het voorwerp P vervolgt, na de goot bij B te hebben verlaten, zijn weg door de lucht, tot dit het horizontale vlak treft.

Bereken de ligging van de top dezer baan en de ligging van het trefpunt in het horizontale vlak. Met welke snelheid wordt dit vlak getroffen?

Schets de baan van P. $g = 10$ m/sec^2.

De luchtweerstand is te verwaarlozen. (1948, 3).

8. Zie figuur 2.



Figuur 2

In de figuur stelt AC een hellend vlak voor ($AC = 10$ m, $AB = 6$ m). Bij C raakt dit vlak aan een cirkelvormig gebogen vlak. CDE is een kwart-cirkel met een straal van 5 m. In E gaat het gebogen vlak over in het raakvlak EF. F ligt even hoog als M. In

A wordt een stoffelijk punt, dat 15 kg weegt, losgelaten. Dit doorloopt eerst de weg *ACDEF*, waarna het bij *F* terugkeert. Langs *AC* ondervindt het stoffelijke punt wrijving, langs de andere vlakken niet. $g = 10$ m/sec^2.

Gevraagd:

a. Hoe groot is de wrijvingscoëfficiënt langs *AC*?

b. Welke kracht oefent het stoffelijke punt in *D* op het gebogen vlak uit? Hoe ontstaat deze kracht?

c. Hoe ver komt het uit *F* terugkerende punt voorbij *C*?

Men laat het stoffelijke punt opnieuw uit *A* los, maar men heeft eerst in *D* een tweede stoffelijk punt, dat 22,5 kg weegt, op het gebogen vlak geplaatst.

d. Hoe ver stijgt dit stoffelijke punt, dat geen wrijving ondervindt, na de volkomen veerkrachtige botsing boven de horizontaal door *D*? (1949, 1).

9. Een stoffelijk punt, dat 20 kg weegt, ligt aanvankelijk in rust op een horizontaal vlak. De wrijvingscoëfficiënt tussen het lichaam en het vlak bedraagt 0,5.

Aan het stoffelijke punt wordt een staaf zodanig bevestigd, dat deze met het horizontale vlak een hoek α insluit, waarvan de tangens 0,75 is.

Men oefent nu gedurende 18 sec. met de staaf een drukkracht van 25 kg schuin omlaag op het stoffelijke punt uit.

Na deze 18 sec. oefent men met de staaf, die zijn richting behoudt, een trekkracht van 25 kg in de staafrichting op het stoffelijke punt uit, totdat dit in rust is gekomen. $g = 10$ m/sec^2.

Gevraagd te berekenen:

a. Hoeveel m heeft het lichaam tijdens zijn beweging afgelegd?

b. Hoe lang heeft de gehele beweging geduurd?

c. Hoeveel kgm zijn bij deze beweging aan wrijvingsarbeid verloren gegaan? (1949, 3).

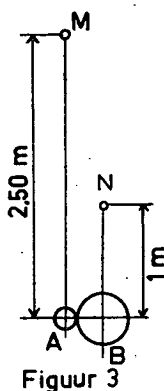
10. Zie figuur 3.

Aan twee evenwijdige koorden, die in de punten *M* en *N* bevestigd zijn, hangen twee bollen *A* en *B*, die resp. 10 kg en 40 kg wegen.

De afmetingen van de bollen en het gewicht van de koorden mogen verwaarloosd worden.

Eerst zijn beide koorden verticaal; de bollen bevinden zich dan op dezelfde hoogte en raken elkaar.

Men geeft nu het koord MA een uitwijking van 60° met de verticale richting en laat A los, waarbij een neergaande beweging ontstaat. $g = 10$ m/sec².



Figuur 3

Gevraagd:

a. Als bij de neergaande beweging MA een hoek α met de horizontale richting bereikt, waarvoor $\cos \alpha = 0{,}8$ bedraagt, hoe groot is dan de spankracht in het koord?

b. Als bij de neergaande beweging MA een hoek β met de horizontale richting bereikt, waarvoor $\sin \beta = 0{,}8$ bedraagt, hoe groot is dan de absolute versnelling van A op dat moment? Teken deze vector in de figuur.

c. Als A in het laagste punt recht, centraal en volkomen veerkrachtig tegen B botst, welke snelheden hebben dan A en B na de botsing?

d. Als bij de grootste uitwijking van B na de botsing het koord NB een hoek γ met de verticale richting bereikt, bereken dan een goniometrische verhouding van deze hoek.

Hoe groot is de spankracht in het koord NB op het moment van de grootste uitwijking?

Hoe groot is dan de centripetaalkracht? (1950, 3).

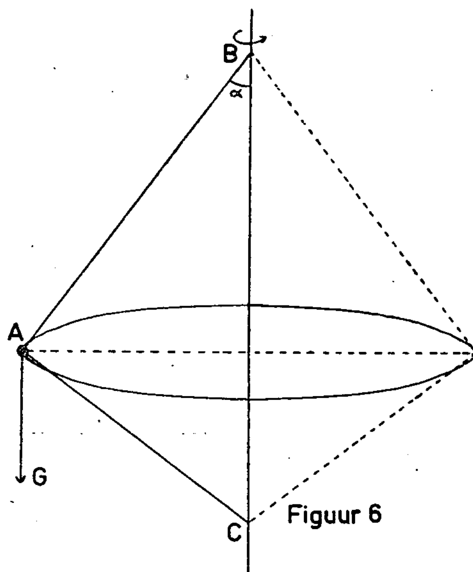
11. Zie figuur 4.

Een hellende staaf AB steunt met het uiteinde A tegen een verticale muur en rust met het midden M zonder wrijving op een horizontale pen, die evenwijdig aan de muur loopt. AB is 5,2 m lang en weegt 26 kg. Het zwaartepunt van de staaf ligt op een afstand van 2,25 m van A; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$.

In B wordt op de staaf een verticale, omlaaggerichte kracht van 20 kg uitgeoefend. De staaf verkeert in de gegeven stand in even-

tg $\alpha = \frac{3}{4}$; $\angle BAC = 90°$; $AB = \frac{5}{6}$ m; $g = 10$ m/sec^2.

a. Welke krachten ondervindt het stoffelijk punt tijdens de beweging?



Figuur 6

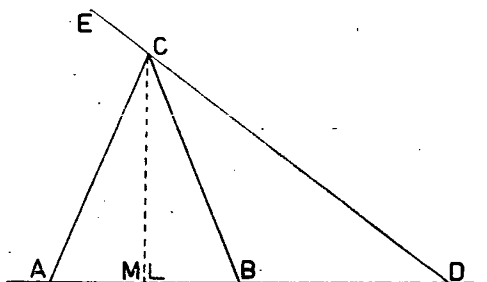
Bereken de spankrachten die in de koorden AB en AC optreden.

b. Bepaal grafisch de grootte van de spankrachten in AB en AC en licht de constructie toe.

Lengte-schaal: 1 m ≡ 12 cm; krachten-schaal: 1 kg ≡ 2 cm. (1952, 3).

14. Zie figuur 7.

Een homogene rechte cirkelkegel ABC die 80 g weegt, staat op een ruw horizontaal vlak. In het punt D is een homogene staaf



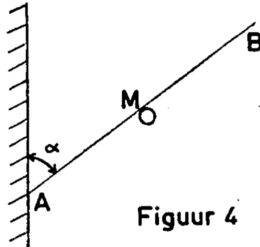
Figuur 7

wicht, waarbij de wrijving tussen de muur en de staaf maximaal is.

Hoe groot is de wrijvingscoëfficiënt tussen de staaf en de muur?

Hoe groot is de wrijvingshoek?

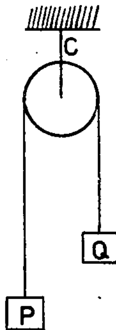
Hoe groot is de kracht, die de staaf op de pen uitoefent? (1951, 3a).



Figuur 4

12. Zie figuur 5.

Over een in een punt C opgehangen katrol is een koord geslagen, aan de uiteinden waarvan de stoffelijke punten P en Q zijn bevestigd. P weegt 15 kg. De wrijving in de katrol en de massa's van het koord en van de katrol worden verwaarloosd. Het stelsel wordt aan zichzelf overgelaten. Daardoor wordt er in C een kracht van 20 kg uitgeoefend.



Figuur 5

Hoe groot is de spankracht in het koord PQ?

Hoe zwaar is Q? $g = 10$ m/sec². (1951, 3b).

13. Zie figuur 6.

Een stoffelijk punt, dat 1 kg weegt, is door de twee koorden AB en AC, waarvan de massa's worden verwaarloosd, verbonden aan een verticale as. Het stoffelijk punt wentelt eenparig om deze as met een hoeksnelheid van 6 rad/sec. Bij deze beweging zijn de beide koorden gespannen.

DE, die een gewicht van 250 g heeft, scharnierend aan het horizontale vlak bevestigd, zodanig dat de staaf tegen de top *C* van de kegel steunt. Daardoor staat de kegel op het punt te gaan glijden en te gaan kantelen. Tussen de kegel en de staaf bestaat geen wrijving.

$AM = 10$ cm, $CM = 24$ cm en $DM = 32$ cm.

Bereken:

a. De wrijvingscoëfficiënt tussen de kegel en het horizontale vlak.

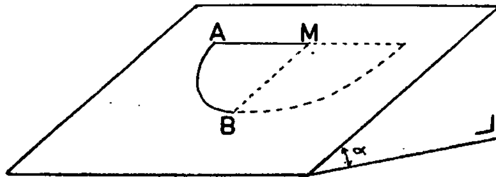
b. De kracht die de staaf op de kegel uitoefent.

c. De kracht die het horizontale vlak op de kegel uitoefent.

d. De lengte van de staaf. (1953, 1).

15. Zie figuur 8.

Een stoffelijk punt *P* dat 7 kg weegt, is door middel van een niet elastisch, volkomen buigzaam koord, waarvan de massa kan worden verwaarloosd, verbonden met een punt *M* van een helling. (tg $\alpha = 0{,}75$; zie fig.).



Figuur 8

Men plaatst *P* in *A* op de helling, zodanig dat het koord horizontaal gestrekt is. Vervolgens laat men *P* los, waardoor het een cirkelvormige baan beschrijft. Op het ogenblik dat *P* voor de eerste maal het laagste punt *B* passeert, bedraagt de snelheid 2 m/sec.

a. Hoe groot is dan de spankracht in het koord?

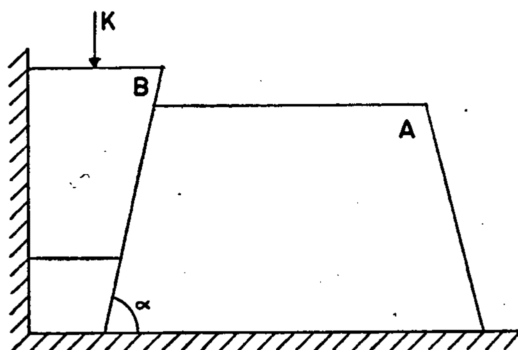
b. Bereken de wrijvingscoëfficiënt tussen *P* en de helling.

$AM = 70$ cm; $\pi = \frac{22}{7}$; $g = 10$ m/sec^2. (1953, 2).

16. Zie figuur 9.

Een blok *A*, dat 955 kg weegt, staat op een horizontaal vlak ($\cos \alpha = \frac{9}{41}$). De wrijvingscoëfficiënt tussen *A* en het horizontale vlak bedraagt 0,2. Om *A* te verschuiven plaatst men tussen de verticale muur en *A* een keg *B*. Vervolgens oefent men op *B* een verticale kracht *K* uit.

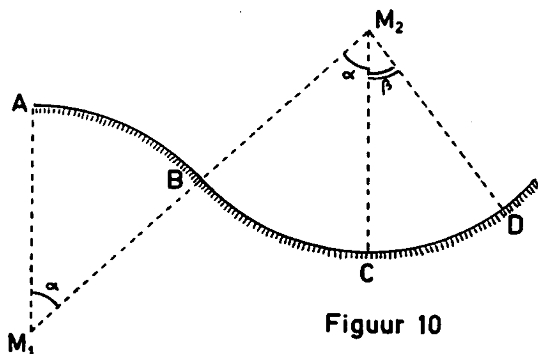
Het eigen gewicht van de keg wordt verwaarloosd. Tussen de keg en de muur is de wrijvingscoëfficiënt 0,1; tussen A en B wordt de wrijving verwaarloosd.



Figuur 9

Hoe groot is de kracht K, welke nodig is om het blok A eenparig versneld te verschuiven met een versnelling van 0,4 m/sec^2? $g = 10$ m/sec^2. Men mag aannemen, dat het blok niet zal gaan kantelen. (1954, 1).

17. Zie figuur 10.
Men plaatst een stoffelijk punt P, dat 150 g weegt, in het hoogste punt A van een cirkelvormig gebogen vlak.
In B hebben de cirkelbogen AB en BCD een gemeenschappelijke raaklijn. De stralen van de cirkelbogen zijn 0,45 m; $\cos \alpha = \frac{2}{3}$; $\cos \beta = \frac{4}{5}$; $g = 10$ m/sec^2. Lengteschaal: 1 cm $\equiv$ 0,1 m; krachtenschaal: 1 cm $\equiv$ 100 g.



Figuur 10

Het stoffelijk punt P glijdt zonder beginsnelheid vanuit A over het gebogen vlak en doorloopt daarbij de cirkelvormig gebogen baan $ABCD$ zonder wrijving te ondervinden.

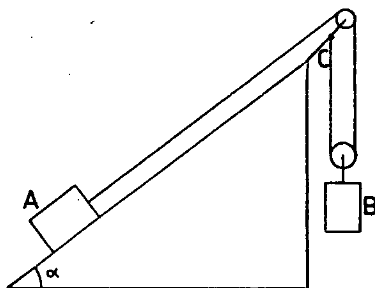
a. Bereken de waarden, tussen welke de normaalkracht, die het gebogen vlak op P uitoefent, sprongsgewijze verandert, als P het punt B passeert.

b. Bereken de resulterende kracht, welke P in het punt D ondervindt. Teken deze kracht in de figuur op schaal in de juiste richting. (1954, 2).

18. Zie figuur 11.

Een stoffelijk punt A, dat 40 g weegt, ligt op een helling ($\text{tg}\,\alpha = \frac{3}{4}$).

Door middel van een volkomen buigzaam, niet rekbaar koord, waarvan de massa verwaarloosd wordt, is het verbonden met een stoffelijk punt B, dat 80 g weegt. Daarbij loopt het koord op de aangegeven wijze over twee schijfjes en verder is het in C vastgemaakt. De massa en de wrijving van de schijfjes worden verwaarloosd. $g = 10$ m/sec².



Figuur 11

a. Hoe groot zou de wrijvingscoëfficiënt tussen A en de helling ten minste moeten zijn, opdat het stelsel in rust blijft, als men het aan zichzelf overlaat?

b. Indien de wrijvingscoëfficiënt tussen A en de helling $\frac{1}{8}$ bedraagt, met welke versnellingen beginnen A en B dan te bewegen en hoe groot is in dat geval de spankracht in het koord? (1954, 4).

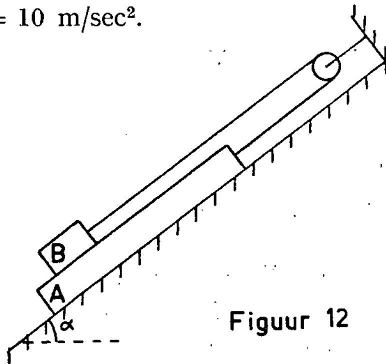
19. Zie figuur 12.

Twee homogene blokken A en B, verbonden door een koord, dat over een schijf loopt, worden in de getekende stand vastgehouden. A weegt 50 kg en B weegt 10 kg. Verder is $\text{tg}\,\alpha = 0{,}75$.

Het koord is volkomen buigzaam, heeft geen massa en is niet rekbaar. De massa en de wrijving van de schijf worden verwaarloosd.

De wrijvingscoëfficiënt is $\frac{1}{24}$ tussen A en de helling en $\frac{1}{4}$ tussen A en B.

Men laat het stelsel nu los, waardoor A over de helling omlaag gaat glijden. $g = 10$ m/sec².

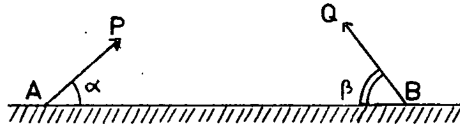


Figuur 12

a. Bereken, hoe groot de versnellingen zijn, die A en B krijgen, en hoe groot de spankracht in het koord bij deze beweging is.

b. Als A 0,5 m omlaag gegleden is, waarbij B over A blijft bewegen, bereken dan hoeveel wrijvingsarbeid er verricht is. (1955, 1).

20. Zie figuur 13.



Figuur 13

Twee stoffelijke punten P en Q worden gelijktijdig uit de punten A en B van een horizontaal vlak onder hoeken van α en β weggeschoten. De beginsnelheid van P bedraagt 100 m/sec.

a. Bereken (zonder gebruik te maken van de onder b. gegeven tijd) de snelheid van P op een hoogte van 100 m boven het horizontale vlak.

b. Als nu verder gegeven is, dat deze hoogte 2 sec na het wegschieten bereikt wordt, bepaal dan de tangens van de elevatiehoek α van P.

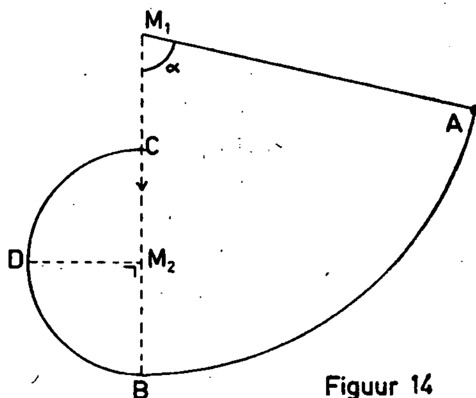
c. De tangens van de elevatiehoek β van Q is $\frac{4}{3}$. Indien gegeven is dat P en Q in het hoogste punt van hun banen tegen elkaar botsen, bereken dan de beginsnelheid van Q en de afstand AB.

d. Als de botsing volkomen veerkrachtig verloopt en P en Q resp. 1,7 kg en 0,8 kg wegen, waar treffen P en Q dan na de botsing het horizontale vlak?

De luchtweerstand wordt verwaarloosd. $g = 10$ m/sec². (1955, 3).

21. Zie figuur 14.

Een stoffelijk punt, dat 60 g weegt, is door middel van een koord van 1,5 m lengte verbonden met een vast punt M_1. Het koord is volkomen buigzaam, heeft geen massa en is niet rekbaar. In de getekende stand M_1A, waarbij het koord gespannen is, laat men het stoffelijk punt los. Als het koord in de verticale stand M_1B is gekomen, slaat het tegen een horizontale pen M_2, die loodrecht op het vlak staat, dat door het koord beschreven wordt. (De dikte van de pen M_2 wordt verwaarloosd. $M_1M_2 = 1$ m.) Hierdoor gaat het stoffelijk punt een cirkelvormige baan beschrijven met M_2B als straal en daarbij bereikt het nog juist het hoogste punt C van de baan. $g = 10$ m/sec².



Figuur 14

a. Bepaal cos α.

b. Bepaal de spankracht in het koord onmiddellijk voordat het tegen de pen M_2 komt en onmiddellijk daarna.

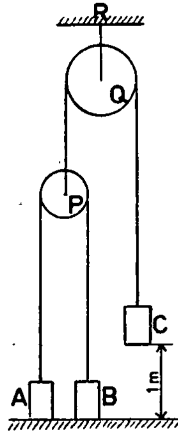
c. Hoe groot is de spankracht in het koord, direct nadat men in A het stoffelijk punt heeft losgelaten?

d. Bereken de grootte van de resulterende kracht, die in D op het stoffelijk punt werkt, en teken deze resultante in de figuur in de juiste richting. (1955, 4).

22. Zie figuur 15.

Twee lichamen A en B zijn verbonden door een koord, dat over een schijf P loopt. P is door een ander koord verbonden met een lichaam C. Dit laatste koord loopt over een schijf Q, die in R is opgehangen. De massa's van schijven en koorden worden verwaarloosd evenals alle wrijving. In de begintoestand staan A en B op een horizontaal vlak, terwijl C zich er 1 m boven bevindt. A en B wegen respectievelijk 35 en 25 kg. Men laat nu C los, waardoor B

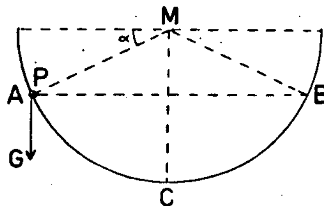
direct omhoog gaat. Hierbij blijft A op het vlak staan zonder nog een kracht van het vlak te ondervinden. Bereken het gewicht van C en de snelheid waarmee C het horizontale vlak bereikt. $g = 10$ m/sec². (1956—I, 1).



Figuur 15

23. Zie figuur 16.

Gegeven is een holle halve bol met de symmetrie-as MC verticaal. De inwendige straal is 1,5 m. $g = 10$ m/sec².



Figuur 16

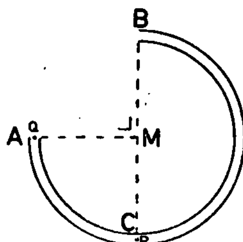
a. In A laat men een stoffelijk punt P los, dat 3 kg weegt. P beschrijft zonder wrijving de cirkelboog ACB, waarbij het in C een kracht van 5,4 kg op de halve bol uitoefent. Bereken sin α.

b. De halve bol draait nu eenparig om de as MC. Wanneer gegeven is dat P, in het punt A van de halve bol blijvend, met de halve bol meedraait, bereken dan de hoeksnelheid en de kracht die P op de halve bol uitoefent. (1956—I, 3).

24. Zie figuur 17.

In een verticaal vlak is een buis, gebogen in de vorm van een driekwartcirkel met een gemiddelde straal van 0,8 m, opgesteld. In deze buis ligt in C een stoffelijk punt P dat 0,5 kg weegt.

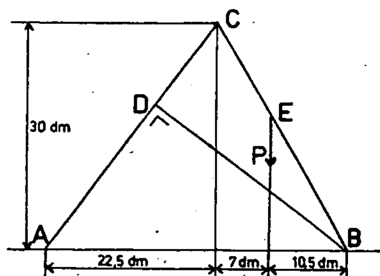
Men laat in A in de buis eén stoffelijk punt Q los, dat omlaag glijdt en in C volkomen veerkrachtig tegen P botst. Daardoor beweegt P door de buis omhoog, verlaat deze in B en komt dan juist in A.



Figuur 17

Alle wrijving wordt verwaarloosd.
Hoeveel kg weegt Q? $g = 10$ m/sec². (1956—I, 4).

25. Zie figuur 18.
Twee ladders AC en BC waarvan de eigen gewichten verwaarloosd worden, zijn in C scharnierend verbonden en staan op een horizontaal vlak, waarvan de wrijving verwaarloosd wordt. BD is een koord dat in B aan de ladder bevestigd is. ($BD \perp AC$).

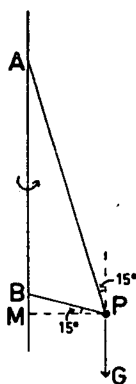


Figuur 18

In E staat iemand die 80 kg weegt op BC. Bereken de spankracht in koord BD. Bepaal ook grootte en richting van de kracht die BC in C op AC uitoefent. (1956—II, 1).

26. Zie figuur 19.
De uiteinden van één koord zijn bevestigd aan twee punten A en B van een verticale as. Dit koord loopt door een ringetje, dat bevestigd is aan een stoffelijk punt P dat G kg weegt. Van het koord worden rek en massa verwaarloosd, terwijl het koord volkomen buigzaam is. P kan zonder wrijving langs het koord verschuiven.

Als de as eenparig ronddraait, beschrijft *P* eenparig een cirkelvormige horizontale baan met een straal *PM* van 40 cm. Daarbij sluit *PA* 15° met de verticaal in en *PB* 15° met de horizontaal (zie

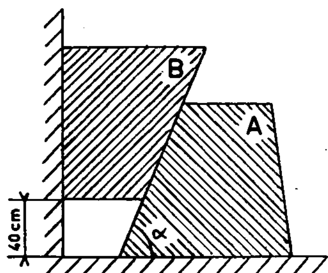


Figuur 19

figuur). Bereken de hoeksnelheid en de spankracht in het koord. Teken en beschrijf de krachten die op *P* werken. Hoe groot is hun resultante en hoe is deze gericht? $g = 10$ m/sec². (1956—II, 3).

27. Zie figuur 20 en de opmerking na vraagstuk 30.

Tussen een blok *A* (gewicht 56 kg, op een horizontaal vlak in rust) en een verticale muur, plaatst men een blok *B* (gewicht 25 kg). De onderkant van *B* bevindt zich 40 cm boven het horizon-



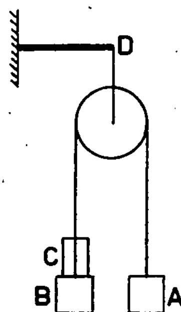
Figuur 20

tale vlak. Men laat het stelsel los. Alle wrijving wordt verwaarloosd. Hoe groot is de snelheid van *A* als *B* het horizontale vlak bereikt, en hoe groot is de kracht, die *B* tijdens zijn daling op *A* uitoefent? Gegeven is: $\operatorname{tg} \alpha = 2{,}4$. (1957—I, 1).

28. Zie figuur 21 en de opmerking na vraagstuk 30.

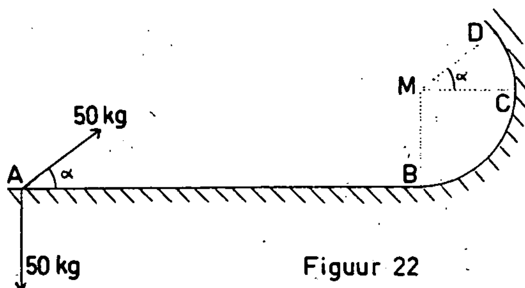
Over een vaste katrol, in *D* opgehangen aan een balk, is een koord

geslagen, waaraan twee lichamen A en B (elk een gewicht van 10 kg) hangen. Men plaatst op B een lichaam C dat 5 kg weegt. Het stelsel wordt aan zichzelf overgelaten. Welke kracht oefent C dan op B uit en welke kracht werkt er in D op de balk? (1957—II, 1).



Figuur 21

29. Zie figuur 22 en de opmerking na vraagstuk 30.
In A ligt een stoffelijk punt, dat 50 kg weegt, op een horizontaal vlak in rust. Er gaat een kracht van 50 kg op werken, die een hoek α met het horizontale vlak insluit. Tg $\alpha = 0{,}75$. Tussen het stoffelijk punt en het horizontale vlak is de wrijvingscoëfficiënt 0,75.



Figuur 22

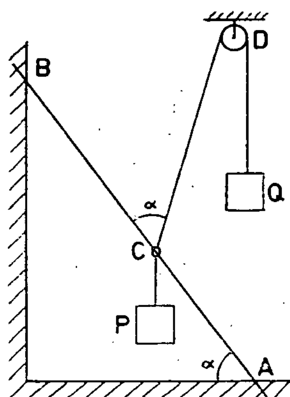
In B gaat het horizontale vlak over in een cirkelvormig gebogen vlak met een straal $MB = 1$ m. Het stoffelijk punt gaat bij B over het gebogen vlak bewegen. Daarbij ondervindt het geen wrijving, maar de kracht van 50 kg blijft er (onveranderd in grootte en richting) op werken. Als het punt D bereikt is, oefent het stoffelijk punt op het gebogen vlak een kracht van 40 kg uit. Hoe groot is de afstand AB? (1957—II, 2).

30. Zie figuur 23 en de opmerking na dit vraagstuk.
Over een vaste staaf AB kan een ringetje C verschuiven. De massa

van het ringetje wordt verwaarloosd. Aan het ringetje hangt aan een koord een stoffelijk punt P, dat 10 kg weegt. Aan het ringetje is een tweede koord bevestigd, dat over een katrol D loopt. Aan dit koord hangt een stoffelijk punt Q. Tussen ring en staaf is de wrijvingscoëfficiënt 0,5.

In de evenwichtsstand maakt koord CD met staaf AB een hoek α die gelijk is aan de hoek, die de staaf met de horizon maakt. $\text{Tg}\,\alpha = \frac{4}{3}$.

Bepaal de grootste en kleinste waarde van Q. (1957—II, 3).



Figuur 23

Opmerking. De vraagstukken 27 tot en met 30 werden voorafgegaan door het volgende:

Van de in de vraagstukken voorkomende koorden wordt aangenomen dat ze niet-elastisch, volkomen buigzaam en massaloos zijn. Van de voorkomende katrollen worden massa en wrijving verwaarloosd. $g = 10$ m/sec^2.

10. a. $S = 8$ kg.
b. $a = 6\sqrt{2}$ m/sec².
c. $v_A = -3$ m/sec, $v_B = 2$ m/sec.
d. $\cos \gamma = \frac{4}{5}$, $S = 32$ kg, $C = 0$.

11. $f = \frac{1}{5}$, $\varphi = \text{bg tg } \frac{1}{5}$, $N = 50$ kg.

12. $S = 10$ kg, $G_Q = 7{,}5$ kg.

13. a. $S_1 = 1{,}88$ kg, $S_2 = 0{,}84$ kg, $G = 1$ kg.

14. a. $f = \frac{5}{12}$.
b. $N = 125$ g.
c. $N' = 195$ g.
d. $l = 50$ cm.

15. a. $S = 8{,}2$ kg.
b. $f = \frac{1}{4}$.

16. $K = 78$ kg.

17. a. 0 g → 200 g.
b. $R = 10\sqrt{277}$ g.

18. a. $f \geqq \frac{1}{2}$.
b. $a_A = 200$ cm/sec², $a_B = 100$ cm/sec², $S = 36$ g.

19. a. $a_A = a_B = 3$ m/sec², $S = 11$ kg.
b. Wrijvingsarbeid —3 kgm.

20. a. $v = 40\sqrt{5}$ m/sec.
b. $\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$.
c. $v = 75$ m/sec, $AB = 750$ m.
d. P: 480 m rechts van A; Q: 480 m rechts van B.

21. a. $\cos \alpha = \frac{1}{6}$.
b. $S_1 = 160$ g, $S_2 = 360$ g.
c. $S = 10$ g.
d. $R = 60\sqrt{10}$ g.

22. $G_C = 87{,}5$ kg, $v = 2$ m/sec.

23. a. $\sin \alpha = \frac{3}{5}$.
b. $\omega = 3\frac{1}{3}$ rad/sec, $K = 5$ kg.

24. $G_Q = 1{,}5$ kg.

25. $S = 35$ kg, $K = 28$ kg horizontaal naar links.

26. $R = G$, horizontaal naar links.

27. $v = 1$ m/sec, $K = 18{,}2$ kg.

28. Kracht van C op B : 4 kg, $K_D = 24$ kg.

29. $AB = 0{,}4$ m.

30. 11 kg $\leqq Q \leqq$ 25 kg.

ANTWOORDEN.

1. a. $v_A = 10$ m/sec.
   b. $S_A = 30$ kg.

2. $G \sin x = T_1 \cos 20° — T_2 \cos 40°$,
   $G \cos x = T_1 \sin 20° + T_2 \sin 40°$,
   $T_1 \sin 20° = T_2 \sin 40°$
   (of $\text{tg}\, x = \frac{1}{2}(\text{tg}\, 70° — \text{tg}\, 50°)$).

3. $N_B = \frac{5}{6}G\sqrt{3}$; scharnierkracht in A:
   $K_v = —\frac{1}{4}G$, $K_h = \frac{5}{12}G\sqrt{3}$.

4. 1°. $R = 14700\sqrt{14}$ dn, $a = 245\sqrt{14}$ cm/sec², volgens raaklijn, $S = 14700\sqrt{2}$ dn.
   2°. $R = 58800$ dn, $a = 980$ cm/sec², horizontaal.

5. a. $\varphi \geqq \alpha$.
   b. $N = K \cos \varphi$, $W = K \sin \varphi$.
   c. $T = \dfrac{P}{2 \sin (\varphi — \alpha)}$, $N = \dfrac{P \cos \varphi}{2 \sin (\varphi — \alpha)}$, $W = \dfrac{P \sin \varphi}{2 \sin (\varphi — \alpha)}$.

6. a. $v = 3\sqrt{2}$ m/sec, $G = 5$ kg, $N = 4$ kg, $W = 1$ kg, $S = 4{,}4$ kg, $K = 0{,}4$ kg, $f = \frac{1}{4}$.
   b. $v = 4$ m/sec², wrijvingswarmte $\frac{2}{427}$ kcal.
   c. 1°. 2 g.s.e., 4 kgm; —1 g.s.e., 1 kgm.
   2°. 3 g.s.e., 3 kgm.

7. a. $v_A = 2\sqrt{7}$ m/sec.
   b. $G_A = 0{,}2$ kg, $N_A = 0{,}9$ kg, $G_D = 0{,}2$ kg, $N_D = 0{,}3$ kg.
   c. top: $h = 1{,}35$ m, $\frac{1}{10}\sqrt{3}$ m links van B;
   trefpunt: A, $v = 2\sqrt{7}$ m/sec, $\text{tg}\, \alpha = 3\sqrt{3}$.

8. a. $f = \frac{1}{4}$.
   b. $N = 45$ kg.
   c. 5 m voorbij C.
   d. stijging 3,2 m.

9. a. $s = 225$ m.
   b. $t = 20$ sec.
   c. Wrijvingsarbeid —3600 kgm.

TEKENEN, CONSTRUEREN EN EXISTENTIE-BEWIJZEN

door

Dr. W. J. Bos

In Euclides 32, blz. 232—241, heeft Dr. P. G. J. Vredenduin de verhouding tussen tekenen en construeren onder de loupe genomen. Hij heeft daarbij speciaal de vraag pogen te beantwoorden in hoeverre de „intuïtieve inleidingen" tot wijziging van de traditionele opvatting van het construeren aanleiding geven.

Het lijkt mij niet uitgesloten dat de toch al niet geringe tegenstellingen over het meetkunde-onderwijs door dit artikel van Vredenduin nog vergroot zullen worden. Daarom wil ik hieronder een opvatting verdedigen die misschien het beste als een tussenstandpunt omschreven kan worden. Ik zal het betoog van V. niet op de voet volgen, integendeel, ik begin met het onderwerp waar hij mee eindigt.

Bij zeer vele stereometrische problemen gebruiken wij uitdrukkingen zoals: breng een vlak door P loodrecht op *l*; trek de loodlijn uit P op vlak V, enz. Ik geloof dat we het er over eens zullen zijn, dat we deze terminologie in het stereometrie-onderwijs niet kunnen missen. Deze „handelingsterminologie" is eigenlijk alleen toelaatbaar in gevallen waarbij een existentiebewijs geleverd is. V. schrijft: „Is het nu werkelijk noodzakelijk te bewijzen dat door een punt buiten een vlak één vlak gaat, dat hieraan evenwijdig is, en zich bovendien nog uit te putten in het geven van een constructie van dit vlak op grond van de voorgeschreven postulaten". Neen, inderdaad, dat is niet nodig; als bewezen is dat door een punt buiten V één en slechts één vlak gaat evenwijdig aan V, dan mogen we voortaan zeggen: breng een vlak door P evenwijdig V.

Bij het existentie-bewijs worden evenwel andere existentiebeweringen gebruikt, die, hetzij stilzwijgend aangenomen zijn, hetzij weer op andere existentie-beweringen berusten. Tenslotte steunt het bewijs dan op een aantal existentiebeweringen, die, in de „handelingsterminologie" uitgedrukt, tot de constructiepostulaten behoren. (B.v. wordt de stelling: door drie punten, die niet op één rechte liggen, gaat één en slechts één vlak, in de handelingster-

minologie het postulaat: men kan een vlak brengen door drie punten, die niet op één rechte liggen).

V. schrijft: „Het uitvoeren van een constructie staat op één lijn met het opsporen van een meetkundige plaats; het is een methode om alle figuren, die aan een bepaalde eis of complex van eisen voldoen, daadwerkelijk te vinden". Akkoord, een constructie is dus in wezen een existentie-bewijs. Nu wensen de voorstanders van de constructiepostulaten eigenlijk, dat bij iedere constructie de existentie volledig teruggebracht wordt op enkele zeer eenvoudige existentie-beweringen. En dit alles dan in de handelingsterminologie; die eenvoudige existentie-beweringen zijn dan de postulaten. Een eenmaal bewezen constructie mag dan niet zomaar toegepast worden, maar moet weer „uitgevoerd" worden. V. acht deze herhalingen niet, of althans in mindere mate, nodig en beschouwt bovendien meer existenties stilzwijgend als evident. (In zijn leerboek [1]) b.v. de existentie van de bol met middelpunt M en straal R; in de handelingsterminologie is dit het postulaat: men kan met gegeven middelpunt en gegeven straal een bol construeren). In beide opzichten ben ik het met hem eens. Wel is het uit didactisch oogpunt gewenst om belangrijke constructies eens een paar keer te herhalen, maar uiteindelijk zal men moeten afspreken welke constructies als „theorie" beschouwd mogen worden, d.w.z. welke „handelingen" toelaatbaar zijn.

Deze handelingen zijn niet uitvoerbaar in letterlijke zin, maar moeten uitgevoerd gedacht worden. „Het gaat om de redenering", zegt V. Goed, maar de leerlingen denken over objecten en als die objecten er niet „zijn", is geen redenering mogelijk.

Wat de aard van de uitvoerbaarheid betreft, bestaan er in de stereometrie grote verschillen. Enerzijds, bij de netwerken, is de uitvoering haast „echt", op het omvouwen na, anderzijds, bij de constructies van punten, lijnen, enz., die aan bepaalde voorwaarden voldoen, is zelfs een schets soms nauwelijks mogelijk. Terecht acht het Wimecos-leerplan deze constructies dan ook alleen toelaatbaar als ze in een voorgeschreven afbeelding effectief kunnen worden uitgevoerd. V. zal het hier waarschijnlijk niet mee eens zijn, want hij schrijft: „. . . dit daadwerkelijk construeren geschiedt in de geest en niet op papier".

Bij de planimetrie ziet V. grote verschillen tussen de constructies met behulp van meetkundige plaatsen en de constructies van

[1]) Dr. P. G. J. Vredenduin, Stereometrie, Wolters, Groningen.

driehoeken, die aan drie eisen voldoen. Van het eerste type noemt hij als voorbeelden:

1. Construeer de punten, die een gegeven afstand *a* hebben tot twee gegeven snijdende rechten *l* en *m*.

2. Construeer een cirkel, die door drie gegeven punten A, B en C gaat.

Als voorbeeld van het tweede type noemt hij:

Construeer een driehoek ABC, als gegeven zijn *c*, R en *r*.

Als ik het goed begrijp, vindt hij het eerste type belangrijk en het tweede een brok overbodige traditie. Zijn motivering kan ik niet volgen. Bij beide typen gaat het om het „vinden" van alle figuren, die aan bepaalde voorwaarden voldoen. Het is toch wel duidelijk dat men met het resultaat van een „driehoeksconstructie" eigenlijk bedoelt: alle driehoeken congruent met de gevonden driehoek? Zijn punten (of cirkels) belangrijker dan driehoeken (of vierhoeken)?

Bij het eerste type zijn de gegevens altijd voor een deel in ligging gegeven; bij het tweede (meestal) alleen in grootte. Nemen we nu eens het volgende vraagstuk: construeer een driehoek als gegeven zijn basis, tophoek en hoogte. Zodra de basis er staat moet verder een constructie van het eerste type uitgevoerd worden (een m.p.-constructie). Zelfs de constructie van een driehoek, waarvan de drie zijden gegeven zijn, is een m.p.-constructie (al zal bij het omcirkelen niet aan de beide meetkundige plaatsen gedacht worden; beide handelingen zijn in het bewustzijn tot één geheel geworden).

Als V. bedoelt dat er bij de driehoeksconstructies vaak te veel gespecialiseerde kunstgrepen te pas komen, ben ik het echter met hem eens.

Waarschijnlijk is het bezwaar van V. tegen het tweede type echter van andere aard: er wordt daarbij geen existentie-bewijs opgeschreven. „. . . Bij een constructie is, evenals bij een bewijs, de redenering essentieel en de figuur van secundair belang." De constructie-beschrijving moet echter (evenals in de stereometrie) uitsluitend handelingen aangeven, die reeds bewezen, of aangenomen, existenties uitdrukken. De beschrijving geeft dan inderdaad een methode aan om de gevraagde figuur daadwerkelijk te vinden. In deze beschrijving kunnen uitdrukkingen voorkomen als: construeer △PQR volgens ZHH, construeer de ingeschreven cirkel van △DEF, enz. Welke termen toelaatbaar zijn, zal afhangen van de vraag welke constructies men als theorie zal beschouwen (d.w.z. welke existenties reeds bewezen zijn of in de inleiding als evident beschouwd worden).

De constructie-beschrijving (handelingsterminologie) betekent

een reeks van existentie-beweringen, de handeling zelf, de uitvoering van de constructie, eveneens. Wat je gemaakt hebt, bestaat. Juist voor de jonge leerlingen acht ik dit denkend-handelen zeer belangrijk. Persoonlijk ben ik dan ook geneigd in de eerste klas te volstaan met de constructie-uitvoering en in de derde klas meer de nadruk te leggen op de constructie-beschrijving.

De uitvoering van de constructie zal dan aan de eis moeten voldoen, dat de methode om de figuur te vinden er uit af te lezen is, d.w.z. ze zal een een existentie-bewijs moeten impliceren. (De existentie-voorwaarden vereisen dan nog een nader onderzoek; in het algemeen acht ik dit te moeilijk). Uit didactische overwegingen is het dan wenselijk in de tekening nog eens de methode aan te geven waarop reeds behandelde constructies worden uitgevoerd (dus b.v. de methode om een driehoek te construeren volgens ZHH). Doet men dit niet dan is de tekening ook moeilijk te volgen.

Bij het huidige meetkunde-programma betekent dit dus, dat bij een constructie-uitvoering uitsluitend handelingen mogen verricht worden die neerkomen op de gewone hoofdconstructies (verplaatsen van hoeken en lijnstukken, bissectrice, midden, loodlijnen, evenwijdige lijnen). Op welke wijze en met welk tekengereedschap deze handelingen uitgevoerd worden, doet er in principe niet toe, mits de verschillende handelingen en hun volgorde maar goed uit de figuur af te lezen zijn.

Om de betekenis van de laatstgenoemde voorwaarde te doorzien is het nodig eerst stil te staan bij de term „tekenen". Ik begrijp niet goed wat V. hiermee bedoelt. „Teken" zal voor een beginneling, lijkt mij, niets anders kunnen betekenen dan „teken netjes en nauwkeurig". De nauwkeurigheid (eventueel netheid), waarmee aan de opdracht voldaan is, zal de enige maatstaf kunnen zijn bij de beoordeling. Alle hulpmiddelen zijn daarbij toegestaan, b.v. ook het trekken van evenwijdige lijnen langs de lijntjes van het papier. (Wel zal de docent raadgevingen geven ten aanzien van het gebruik van de tekenmiddelen). In een inleiding zullen deze opgaven de vorm van tekenopdrachten hebben. Ze dienen in hoofdzaak om de leerlingen vertrouwd te maken met het tekenmateriaal en de meetkundige terminologie.

Legt men nu aan een klas een aantal „te moeilijke" tekenopgaven voor, dan gaan ze „mikken". Voorbeelden:

1. Teken een driehoek en daarin de cirkel die de drie zijden raakt.

2. Teken een driehoek als gegeven zijn de basis, de tophoek en de hoogte.

Bij het eerste voorbeeld zullen ze het middelpunt door „prikken" pogen te vinden en het resultaat kan wel degelijk behoorlijk nauwkeurig zijn.

Ook de tweede opgave biedt voor een handige knaap geen onoverkomelijke moeilijkheden. Hij zal met de basis beginnen, dan op de rechthoekszijde van zijn tekendriehoek de hoogte aangeven en vervolgens de top vinden door *tegelijk* met gradenboog en driehoek te manipuleren.

Stelt men deze „oplossingen" ter discussie, dan zullen uit de klas bezwaren ertegen naar voren komen. De achtergrond van deze bezwaren is het volgende: ze hebben, juist door de teken (en meet!) opdrachten, ingezien dat een tekening nooit „ideaal" kan zijn. Toch beseffen ze dat het mogelijk moet zijn de tekening zo te maken, dat deze aangeeft hoe bij „ideale" figuren en „ideale" hulpmiddelen de gevraagde cirkel (resp. driehoek) exact gevonden kan worden. Natuurlijk twijfelen ze niet aan de existentie van de ingeschreven cirkel, maar ze voelen de behoefte aan een methode die zegt hoe deze figuren gevonden kunnen worden. Ze zijn dan toe aan het construeren. „Construeer de ingeschreven cirkel" betekent dan: geef in de tekening de methode aan om bij een ideale driehoek met ideale hulpmiddelen het middelpunt en de straal van die cirkel te vinden.

Bij het construeren mag dus niet „gemikt" worden, de figuur mag niet bij toeval kloppen. Het gaat daarbij niet om nauwkeurigheid (al zal men in dat opzicht toch wel eisen stellen).

Het zal hieruit duidelijk zijn dat ik het met de opmerking van V., dat het *construeren* van driehoeken een volkomen overbodige doublure is van het *tekenen* van driehoeken, niet eens kan zijn. Alleen in zeer eenvoudige gevallen zal de opdracht „teken" en de opdracht „construeer" op de zelfde wijze uitgevoerd worden. (B.v. als gegeven zijn een zijde en de beide aanliggende hoeken, maar niet als gegeven zijn een zijde, een aanliggende en de overstaande hoek).

Het voorgaande zou er op neer komen dat bij een constructieuitvoering, behalve passer, liniaal en tekendriehoek, ook gradenboog en centimeter gebruikt mogen worden, mits steeds duidelijk (door tekentjes) de afzonderlijke handelingen worden aangegeven. Nu merkt V. echter op: „. . . En voorts kunnen we eisen, dat het antwoord niet langs goniometrische of algebraïsche weg gegeven wordt, maar zuiver planimetrisch door daadwerkelijk de driehoek te vinden". Laat ik hier maar direct mee instemmen en me niet afvragen waarom algebra en gonio verboden moeten worden. Beperking dus tot „zuivere" meetkunde. Maar dan lijkt het mij

wenselijk het gebruiken van gradenboog en centimeter te verbieden. Laat men immers toe dat hoeken en lijnstukken worden gemeten, dan is het voor de leerlingen niet in te zien in hoeverre zij met de gevonden getallen mogen werken. (Hebben ze twee hoeken van een driehoek gemeten, dan is de derde snel uitgerekend; een verhouding van twee gemeten lijnstukken zal allicht gebruikt worden om een derde lijnstuk te berekenen; ook de goniometrie sluipt binnen).

Het verbod van gradenboog en centimeter komt dus niet voort uit nauwkeurigheidsoverwegingen; bij een constructie is de nauwkeurigheid van de tekening geen criterium. (Wel kan overwogen worden of *tegenover de leerlingen* de onnauwkeurigheid het verbod niet het beste zal motiveren).

Bij de constructie-uitvoering mogen dus alleen passer, liniaal (zonder centimeterverdeling) en tekendriehoek gebruikt worden. *Loodlijnen kunnen met de driehoek gemaakt worden, evenwijdige lijnen door verschuiven.*

Toch lijkt het mij niet onbelangrijk om te laten zien dat alle handelingen ook alleen met passer en liniaal verricht kunnen worden.

Bepaalde constructies kunnen als theorie behandeld worden. Als ze daarna optreden, is het niet meer nodig ze opnieuw te reduceren. B.v.: de raaklijnen uit een punt aan een cirkel mogen ineens getrokken worden, nadat de existentie van het raaklijnenpaar is aangetoond. Laat men toch weer de passer en liniaal-constructie uitvoeren, dan betekent dit eenvoudig een herhaling. Een oordeel over de wenselijkheid hiervan, zal afhangen van het belang dat men aan die constructie toekent.

N.B. Persoonlijk laat ik de „constructie" van de raaklijnen uit een punt aan een cirkel en die van de gemeenschappelijke raaklijnen aan twee cirkels achterwege. De leerlingen mogen deze raaklijnen direct trekken. D.w.z.: ik neem deze existenties zonder bewijs aan.

Samenvatting.

„Teken" betekent: teken zo nauwkeurig mogelijk. Alle middelen zijn toegestaan. In de inleiding wordt „getekend". Verder wordt bij alle bewijsvraagstukken een tekening gemaakt. Ook de analysefiguur bij een constructie is een tekening.

„Construeer" betekent: geef een methode aan waarop alle figuren, die aan bepaalde voorwaarden voldoen, gevonden kunnen worden. Hierbij wordt de afspraak gemaakt dat alleen „zuivermeetkundige" methoden in aanmerking komen.

De oplossing van een constructie-opgave kan gebeuren:

a) door een existentie-redenering,
b) door een constructie-beschrijving (handelingsterminologie),
c) door een constructie-uitvoering (handeling).

De methode (a) leent zich speciaal voor „liggingsconstructies" („de verzameling van de punten, die een afstand *a* tot *l* hebben, bestaat uit de punten, die op een van de rechten p_1 en p_2 op afstand *a* van *l* liggen", enz.), (b) en (c) voor „figuur-constructies" (waarbij ik in de lagere klassen aan (c) de voorkeur geef).

Bij (a) en (b) is een constructie-uitvoering niet nodig.

Bij (c) maakt de beperking tot „zuivere meetkunde" het wenselijk de gradenboog en de centimeter te verbieden.

Bij (b) en (c) impliceert de handelingsterminologie (resp. handeling) een existentie-bewijs. („Trek door P de loodlijn op *l*" impliceert: „er is één en slechts één loodlijn door P op *l*").

Elke „intuïtieve inleiding" bevat een groot aantal „handelingen" (b.v.: een lijn trekken door P//*l*). Een reductie van deze handelingen tot constructie-postulaten is niet noodzakelijk. Deze postulaten zijn geen „ondingen", maar overbodig, omdat de handelingen waaruit de constructie opgebouwd wordt, uit de inleiding bekend zijn.

Terwijl men bij een inleiding in de planimetrie de *handelingen* als uitgangspunt zal nemen, zullen bij een (min of meer) exacte opbouw van de stereometrie meestal de *existentie-beweringen* voorop staan. Constructie-postulaten zijn daar eveneens overbodig, als men afspreekt dat elke existentie-stelling ook als handeling geformuleerd mag worden.

Opmerkingen.

1. Wat betreft het verbod van de gradenboog, aarzel ik wel. Toestaan van de gradenboog zou ook de trisectie van de hoek en de „constructie" van een regelmatige negenhoek mogelijk maken. („Een regelmatige negenhoek kan niet", zeggen de leerlingen nu). Dan echter is rekenen met hoeken toegestaan!

2. Bij de didactische verwerking van de bovenstaande opvatting zou, zoals reeds aangeduid, het begrip construeren duidelijk gemaakt moeten worden naar aanleiding van „te moeilijke" tekenopdrachten. „Construeer" betekent dan: geef in de tekening de methode aan om met ideale hulpmiddelen de gevraagde figuur te vinden. Nu is het echter niet eenvoudig daarna het verbieden van gradenboog en centimeter goed te motiveren. De wenselijkheid van zuiver-meetkundige methoden zegt de leerlingen niet veel, terwijl juist een goed begrip van construeren het inzicht inhoudt, dat de nauwkeurigheid van de uitvoering daarbij niet essentieel is.

De beste uitweg uit deze moeilijkheid lijkt mij om de leerlingen aanvankelijk geen beperkingen van het tekenmateriaal voor te schrijven. Eerst als duidelijk is gaan blijken dat „meten" gauw tot „rekenen" voert en dat dan de tekening niet meer te volgen is, zijn er aanwijsbare motieven om gradenboog en centimeter niet meer te gebruiken. Ongetwijfeld zal zich hierbij de moeilijkheid voordoen dat deze bezwaren niet altijd even duidelijk en niet altijd op hetzelfde moment merkbaar worden.

Deze overwegingen deden ons besluiten in ons leerboek [1]) toch de traditionele opvatting te volgen. Construeer betekent daar: teken alleen met *p.* en *l.*. Bovendien leek ons de afwijking van ons standpunt van het traditionele niet belangrijk genoeg voor een „vernieuwing" in dit opzicht. Practisch immers komt deze afwijking er alleen op neer dat we de tekendriehoek wel toelaatbaar achten. Daar komt bij dat we b.v. de loodlijn-constructie (met *p.* en *l.*) op zichzelf een nuttige en moeilijk vervangbare oefening in het gebruiken van de passer achten. (We laten dan wel na verloop van tijd de tekendriehoek weer toe, onder het motief: „nu weten jullie het wel").

Deze (min of meer traditionele) werkwijze brengt wel met zich mee dat er aanvankelijk misverstanden blijven bestaan ten aanzien van het construeren. Zo zien wij, zelfs bij goede leerlingen, nog wel „mikmethoden" optreden. Maar juist door een discussie over een dergelijke „fout" kan een verscherping van het begrip construeren alsnog bereikt worden.

Toch lijkt ons een poging om het begrip construeren meer principieel te benaderen wel de moeite waard. Dit heeft echter alleen zin als de overbodigheid van de beperking tot *p.* en *l.* algemeen wordt ingezien!

Naschrift.

Ik geloof, dat Dr. Bos en ik het in de grond van de zaak eens zijn, hoewel natuurlijk niet in alle details. Ik zou zijn artikel dan ook willen beschouwen als een waardevolle aanvulling en verheldering van het mijne.

Een korte vergelijking van de beide standpunten is mogelijk voor de lezer verhelderend. We zijn het erover eens, dat constructiepostulaten overbodig zijn. De existentiebewijzen vallen voor ons beide onder de rubriek „constructies". Dr. Bos heeft echter een iets

---

[1]) Dr. W. J. Bos en Drs. P. E. Lepoeter, Wegwijzer in de Meetkunde I, Meulenhoff Amsterdam.

ruimere opvatting van deze term en rekent hieronder ook het in de tekening aangeven van de methode om b.v. bij een ideale driehoek met ideale hulpmiddelen het middelpunt van de ingeschreven cirkel te vinden. Terminologisch zijn we het hier dus niet geheel eens.

Resumerend geloof ik, dat we drie stadia onderscheiden:

a. het tekenen met als enig doel een nauwkeurige figuur te verkrijgen, waarbij b.v. ook mikmethoden en aflezen op schaalverdelingen toelaatbaar zijn,

b. het tekenen volgens methoden, die niet principieel onnauwkeurig zijn, maar hun onnauwkeurigheid uitsluitend te wijten hebben aan de technische onvolmaaktheid van de instrumenten,

c. de existentiebewijzen.

Dr. Bos ziet stadium a als voorbereiding voor b en, naar ik meen, b weer als voorbereiding voor c (hoewel b niet uitsluitend als voorbereiding voor c gezien moet worden). Didactisch lijkt mij dit een zeer aantrekkelijk standpunt. Een hoofddoel van mijn artikel was een duidelijke begripmatige scheiding tussen de stadia b en c aan te brengen.

P. G. J. Vredenduin

KALENDER

Mededelingen voor deze rubriek kunnen in het volgende nummer worden opgenomen, indien zij binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer worden ingezonden bij de redactie-secretaris, Kraneweg 71 te Groningen.

CURSUSSEN VOOR AFGESTUDEERDEN

Avondcolleges te Utrecht (Boothstraat 17) door Prof. Dr. F. van der Blij op 13 en 27 febr. en 13 maart 1958 (*Theorie der algebraïsche vergelijkingen*) en door Dr. A. van der Sluis op 20 febr. en 6 en 20 maart 1958 (*Uitbreiding van het functiebegrip: distributies*), telkens van 19.30 uur tot ongeveer 21 uur. Geen kosten; leraren ontvangen de reiskosten gedeeltelijk vergoed.

VERGADERINGEN LIWENAGEL EN WIMECOS

28 december 1957: „Liwenagel", 10.45 uur in Hotel Noord-Brabant, Vredenburg, Utrecht. (Zie aankondiging in dit nummer).

30 december 1957: „Wimecos", 10.30 uur in het I.C.C.-paviljoen, Vondelpark 3, Amsterdam. (Zie aankondiging in het vorige nummer).

HET SCHRIFTELIJK EINDEXAMEN

Aan de Rectoren van Gymnasia en Lycea en Directeuren van H.B.S.-en hebben de Inspecteurs het volgende schrijven gericht.

Het is het college van inspecteurs gebleken dat de inhoud van vroeger verzonden circulaires ten aanzien van beperkingen bij het schriftelijk eindexamen wiskunde van het gymnasium-B en de h.b.s.-B niet op alle scholen bekend is.

Om deze onzekerheid, voorzover ze bestaat, weg te nemen en te voorkomen dat bij het wiskunde-onderwijs te veel tijd wordt besteed aan training op allerlei onderwerpen, waarover men in twijfel verkeert, zijn in de hierna volgende *herziene* en *aangevulde* lijst een aantal onderwerpen genoemd, waarover op het schriftelijk eindexamen geen opgaven gesteld zullen worden.

Het is uiteraard niet de bedoeling daarmee aan te geven dat deze onderwerpen ook uit de leerstof dienen te verdwijnen, maar alleen dat daarover geen vraagstukken bij het schriftelijk examen zullen worden opgegeven. Bij het onderwijs en dientengevolge bij het mondeling examen kunnen deze en andere (hier niet genoemde) onderwerpen tot hun recht komen.

Lijst van onderwerpen en typen vraagstukken, waarover op het schriftelijk eindexamen voor wiskunde geen opgaven gesteld zullen worden.

A. *Gymnasium-B en h.b.s.-B.*

1. *Algebra.*

Het herleiden van $\sqrt{(a + b\sqrt{c})}$ tot de som of het verschil van twee wortels;
het verdrijven van $\sqrt{(a + b\sqrt{c})}$ uit de noemer van een breuk;
het verdrijven van andere dan vierkantswortels uit de noemer van een breuk;
onbepaalde vergelijkingen;
wederkerige vergelijkingen;
twee vierkantsvergelijkingen, die een wortel gemeen hebben;
vraagstukken over grafische voorstellingen, die in wezen analytische-meetkunde-vraagstukken zijn (zoals die vraagstukken, die betrekking hebben op een raaklijn aan een parabool of de basispunten van een bundel);
de reststelling (wel moet men weten dat een gehele rationale functie, die een nulwaarde a heeft, deelbaar is door $x - a$);

het oplossen van derde- en hogeregraads-vergelijkingen, waarvan een wortel gegeven of direct te zien is;
merkwaardige quotiënten;
het verband tussen de wortels en de coëfficiënten van vergelijkingen, die van de derde of hogere graad zijn;
rekenkundige reeksen van hogere orde;
de harmonisch middelevenredige;
complexe getallen;
bewijzen door middel van volledige inductie;
samengestelde interest.

2. *Trigonometrie.*

Gekunstelde goniometrische vergelijkingen;
cyclometrische functies;
het probleem van Snellius.

3. *Stereometrie.*

Formules voor de inhoud van boldelen;
formules voor de inhoud van het afgeknotte driezijdige prisma, de afgeknotte piramide en de afgeknotte kegel;
het netwerk van een prisma;
de prismoïde;
de stelling van Euler; vraagstukken over regelmatige twaalf- of twintigvlakken;
de drievlakshoek;
vraagstukken, waarbij kennis verondersteld wordt van formules betreffende regelmatige veelhoeken of van de stelling van Ptolemaeus.

B. *Gymnasium-B.*

Analytische meetkunde.

De stellingen van Apollonius;
de formules voor de transformatie van coördinaten bij de rotatie van het assenkruis;
de classificatie van kegelsneden, waarvan de vergelijking in algemene gedaante gegeven is (wel moet men kennen de vergelijking $xy = c$ voor de orthogonale hyperbool);
bundels van kegelsneden (wel moet men van cirkelbundels op de hoogte zijn).

C. *H.B.S.-B.*

Beschrijvende meetkunde.

De examenstof voor dit leervak zal beperkt blijven tot:

a) de grondconstructies van de orthogonale parallelprojectie;
b) doorsnijding met platte vlakken van door platte vlakken begrensde lichamen;

c) de wenteling van figuren om een as evenwijdig aan of loodrecht op het horizontale projectievlak;

d) de bol, benevens de kegel en de cilinder in eenvoudige ligging d.w.z. met assen loodrecht op een der drie onderling loodrechte projectievlakken.

In het algemeen kan nog meegedeeld worden dat getracht zal worden vraagstukken op te geven, waarvoor niet een uitgebreide kennis van formules, noch zeer uitvoerige berekeningen vereist zijn. Het doel van het wiskunde-onderwijs zij vorming van inzicht, ook in de samenhang der verschillende wiskunde-vakken, scholing van wiskundig denken, niet het instampen van veel stellingen en formules. Wel dient gelet te worden op nauwkeurig rekenen en op vaardige hantering van de logaritmentafel.

OFFICIËLE MEDEDELING VAN „LIWENAGEL"

(Een ieder, die lid is van het Genootschap van Leraren aan Gymnasia en Lycea en die wiskunde en/of natuurwetenschappen doceert, is *automatisch* lid van de Groep Liwenagel).

LEDENVERGADERING op zaterdag 28 december 1957 om 10.45 uur in Hotel NOORD-BRABANT, Vredenburg, UTRECHT.

De eisen, die de maatschappij tegenwoordig stelt aan de leraar en aan de researchwerker, lopen dermate uiteen, dat een in alle opzichten gelijke academische opleiding voor hen niet meer verantwoord is. Uiteraard is het noodzakelijk, dat de aanstaande leraar een volwaardige wetenschappelijke opleiding krijgt. Het is echter gewenst, dat bij de keuze van de onderwerpen, die hij moet bestuderen, rekening gehouden wordt met zijn toekomstig beroep. De hiermee samenhangende problemen, die zowel van wetenschappelijke als van praktische aard zijn, zullen op deze jaarvergadering aan de orde worden gesteld. Het bestuur hoopt, dat vele leden bij de bespreking van deze ongetwijfeld belangrijke kwestie aanwezig zullen zijn.

AGENDA.

1. Opening.
2. Notulen van de vorige ledenvergadering. (Deze zijn gepubliceerd in het Weekblad nr. 4 van 27 sept. 1957 en in Euclides nr. II van 1 okt. 1957.)
3. Verslag van de kascommissie en decharge van de penningmeester.
4. Benoeming van een kascommissie.
5. Lezing door Prof. Dr. J. C. H. Gerritsen, Groningen: „De academische opleiding van de leraar".
   Om ongeveer 12.30 zal de vergadering geschorst worden om te lunchen. Voortzetting van de vergadering om 14.15 uur.
6. Lezing door Prof. Dr. H. Brinkman, Groningen: „De academische vorming van natuurkundeleraren".
7. Bespreking van de wetsvoorstellen voor zover die betrekking hebben op de exacte vakken.
8. Rondvraag.
9. Sluiting.

De secretaris,
D. LEUJES

Thorbeckestraat 47, Delft.